

一类非线性循环程序的终止性

廖苑蓉, 陈光喜

(桂林电子科技大学 广西可信软件重点实验室, 数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004)

摘 要: 提出一类非线性循环程序的终止性是可以判定的. 该类程序的终止性与其赋值矩阵的正特征值相对应的特征向量有关. 然后提出了一种新的判定这类程序终止性的方法, 该方法跟循环迭代的次数和变量的初始赋值息息相关. 通过这个方法, 不但能判定这一类程序是否终止, 还能对不是所有初始值都终止的程序, 给出能使该程序终止的初值建议.

关键词: 非线性循环程序; 终止性; 程序验证; Jordan 标准型

中图分类号: TP301

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2013)11-0051-05

Termination of a Class of Non-linear Loop Programs

LIAO Yuan-rong, CHEN Guang-xi

(Guangxi Key Laboratory of Trusted Software, School of Mathematics and Computational science,
Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: The termination of a class of non-linear loop program can be determined. The category of the program termination assignment matrix with positive eigenvalues related to the corresponding feature vector. Then proposed a new method to determine the type of program termination, the method is closely related with the initial assignment of loop iterations and variables. By this method, not only able to determine whether to terminate this category program, but also on not all the initial values are the termination procedures, given recommendations enables the initial value of the program terminates.

Key words: non-linear loop programs; termination; program verification; Jordan form

1 引言

对于设计高可信软件来说, 如何对软件进行自动验证是一个极具挑战性的问题. 验证一个程序的完全正确性是由程序的部分正确性和程序的终止性两部分构成. 而程序的终止性是一个程序完全正确性的必要基础.

目前, 出现了一些证明程序终止的方法, 其中的主要方法是通过合成秩函数来判断程序在循环过程的终止性^[1]. 文献[2-5]进行了循环程序终止性研究. 在文献[6]中考虑了循环条件为非线性的, 赋值条件为线性的一类循环程序的终止性, 并借助强有力的代数符号工具 DISCOVERER, 精确地判定了

这类程序的是否终止性.

由于文献[6]中的方法, 对于更为复杂的非线性循环程序的终止性在一般情况下是不可判定的. 该程序的是否终止性却跟其初值是相关的, 即在不同的初值条件下, 该循环程序的终止与否是不同的. 本文提出一类非线性程序终止性新的判定.

2 非线性循环程序证明

考虑如下非线性循环程序:

$P_1: \text{while}(B^T X^\partial + C^T X^\beta > 0) \{ X; = AX \},$

式中, $\partial, \beta \in N$ 且 $|\partial| > |\beta|$, X^∂ 和 X^β 为列向量,

$x^\partial = x_1^{\partial_1} x_2^{\partial_2} \cdots x_m^{\partial_m}, \partial = (\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_m);$

$x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_m^{\beta_m}, \beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m);$

收稿日期: 2013-01-16; 修回日期: 2013-03-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(60963024); 广西可信软件重点实验室开放基金

$$|\partial| = \sum_{i=1}^m \partial_i, |\beta| = \sum_{i=1}^m \beta_i \text{ 并且 } X \in R^m.$$

定理 1 如果有一个 n 阶矩阵 A 与两个非零向量 b, c 所定义的如 P_1 所示的非线性循环程序, 如果矩阵 A 存在着一个大于 1 的正特征值对应的特征向量 v , 使得 $b^T v^\partial + c^T v^\beta > 0$, 并且在循环条件中的各系数, 负系数总是所有系数中最小的, 那么程序 P_1 必不终止.

证明: 在满足初值循环条件的前提下, 根据题意, 循环条件中的各系数, 负系数总是所有系数中最小的, 这样就不会担心有时候因为负系数的绝对值过大, 导致对程序的终止性有重要的影响, 因此, 只需考虑与特征值相关的问题.

假设 $v \in R^N$ 是矩阵 A 的某个大于 1 的正特征值 λ 对应的一个特征向量, 有: $Av = \lambda v$, 在面对阶数较低的矩阵时, 可以通过求基础解系把特征向量给求出来, 而如若是阶数较高的矩阵, 可以借助强有力数值计算工具 matlab 进行求解特征向量, 因此这样的特征向量总是会存在并且是可以计算出来的, 再根据题意, 满足 $b^T v^\partial + c^T v^\beta > 0$, 满足循环条件, 在经过第一次赋值后, 有 $X^{(1)} = Av = \lambda v$, 然后进入到第二次循环条件的判段:

$$\begin{aligned} & b^T (X^{(1)})^\partial + c^T (X^{(1)})^\beta \\ &= b^T (\lambda v)^\partial + c^T (\lambda v)^\beta \\ &= \lambda^{|\partial|} b^T v^\partial + \lambda^{|\beta|} c^T v^\beta \\ &= \lambda^{|\beta|} (\lambda^{|\partial-\beta|} b^T v^\partial + c^T v^\beta) \end{aligned}$$

由 $\lambda > 1, |\partial| - |\beta| > 0, b^T v^\partial + c^T v^\beta > 0$, 可得: $b^T (X^{(1)})^\partial + c^T (X^{(1)})^\beta > 0$.

接着第二次赋值: $X^{(2)} = AX^{(1)} = \lambda^2 v$, 然后进入到第三次循环条件的判段:

$$\begin{aligned} & b^T (X^{(2)})^\partial + c^T (X^{(2)})^\beta \\ &= b^T (\lambda^2 v)^\partial + c^T (\lambda^2 v)^\beta \\ &= \lambda^{2|\partial|} b^T v^\partial + \lambda^{2|\beta|} c^T v^\beta \\ &= \lambda^{2|\beta|} (\lambda^{2|\partial-\beta|} b^T v^\partial + c^T v^\beta) > 0 \end{aligned}$$

以此类推, 就可以得到第 $i+1$ 次循环条件的判段:

$$\begin{aligned} & b^T (X^{(i)})^\partial + c^T (X^{(i)})^\beta \\ &= b^T (\lambda^i v)^\partial + c^T (\lambda^i v)^\beta \\ &= \lambda^{i|\partial|} b^T v^\partial + \lambda^{i|\beta|} c^T v^\beta \\ &= \lambda^{i|\beta|} (\lambda^{i|\partial-\beta|} b^T v^\partial + c^T v^\beta) > 0. \end{aligned}$$

因此, 如果存在 A 的一个大于 1 的正特征值所对应的特征向量 v , 使得 $b^T v^\partial + c^T v^\beta > 0$, 那么程序 P_1 必不终止.

证毕.

考虑下面形如 P_1 的非线性程序的终止性.

例 1: while($3x^2 - 5y + 4z > 0$) { $X := AX$ }

$$\text{其中, } X = (x, y, z), A = \begin{bmatrix} 7 & -10 & 17 \\ 3 & 9 & 2 \\ -4 & 5 & 13 \end{bmatrix}.$$

通过计算知道赋值矩阵 A 有正特征值 14 并且与该正特征值相对应的特征向量是 $[1, 1, 1]$. 通过计算满足定理 1 的条件, 根据定理 1, 该循环程序是不终止的.

3 非线性循环程序的实例研究

在实际应用中, 对于一个循环程序更多的我们想知道的是该程序是不是对于任何初始值都是终止或者不终止的, 如果不是, 那在满足什么样的初始条件下它是终止的或者不终止的. 就有了下面的讨论.

从高等代数^[7] 知道,

定义 1 形式为

$$J(\lambda, t) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{t \times t}$$

的矩阵称为若尔当(Jordan) 块,, 其中 λ 是复数, 由若干个若尔当块组成的准对角矩阵称为若尔当矩阵, 其一般形状如

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{k_i \times k_i}$$

并且 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 中有一些可以相等.

定理 2 每个 n 阶复矩阵 A 都与一个若尔当形矩阵相似^[7].

由定义 1 和定理 2 我们知道, 任何矩阵 A 都可以经过变换变成 Jordan 标准型. 而对于一类循环程序是否终止的判断的一个基本步骤是计算赋值矩阵 A 的 n 次迭代. 如果存在一个矩阵 D 使得 $A = PDP^{-1}$, 那么矩阵 D 与矩阵 A 相似, 则有

$$A^n = (PDP^{-1})^n$$

$$= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1}) \\ = PD^n P^{-1} \quad (2)$$

所以式(2)也总能成立.

对于一个循环程序,在给定了一个初始值 x 以后,可以用 $x(i) = A^i x$ 表示变量经过 i 次迭代以后的状态值,然后代回到循环条件以此来判断该程序的是否终止性. 这里,显然 $x(0) = x$. 看具体的例子,首先,先考虑一类循环条件是齐次非线性的,而赋值条件是简单线性的程序.

例 2:考虑如下程序的终止性:

while($-x^2 + 10y^2 + z^2 > 0$)

$$\text{do} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} := A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{end while}$$

$$\varphi(i) = A^i \varphi(0) = PD^i P^{-1} \varphi(0) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1 + 3\cos \frac{i\pi}{2} + \sin \frac{i\pi}{2}) & \frac{1}{2}(1 + 3\sin \frac{i\pi}{2} - \cos \frac{i\pi}{2}) & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(3\cos \frac{i\pi}{2} + \sin \frac{i\pi}{2}) \\ -\sin \frac{i\pi}{2} & \cos \frac{i\pi}{2} & \sin \frac{i\pi}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos \frac{i\pi}{2} + \sin \frac{i\pi}{2}) & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin \frac{i\pi}{2} - \cos \frac{i\pi}{2}) & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos \frac{i\pi}{2} + \sin \frac{i\pi}{2}) \end{bmatrix} \varphi(0).$$

当 $i = 4N$ 时

$$\varphi(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$$

根据上式,有

$$x(i) = x(0),$$

$$y(i) = y(0),$$

$$z(i) = z(0),$$

把 $x(i)$ 、 $y(i)$ 和 $z(i)$ 代入循环条件,有

$$-x(i)^2 + 10y(i)^2 + z(i)^2 \\ = -x^2(0) + 10y^2(0) + z^2(0) > 0 \quad (3)$$

当 $i = 4N + 1$ 时

$$\varphi(i) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$$

根据上式,有

$$x(i) = 2y(0) + z(0),$$

$$y(i) = -x(0) + z(0),$$

$$z(i) = y(0) + z(0).$$

把 $x(i)$ 、 $y(i)$ 和 $z(i)$ 代入循环条件,有

$$-x(i)^2 + 10y(i)^2 + z(i)^2 = 10(x(0) -$$

$$\text{其中,赋值矩阵 } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

在这里,赋值矩阵 $A = [0, 2, 1; -1, 0, 1; 0, 1, 1]$, 该赋值矩阵有三个特征值 $1, i$ 和 $-i$, 其中赋值矩阵 A 中特征根 1 对应的特征向量是 $[1, 0, 1]$. 赋值矩阵 A 的 Jordan 形式为

$$D = [1, 0, 0; 0, 0, -1; 0, 1, 0],$$

而 $P = [1, 1, 2; 0, 1, -1; 1, 0, 1]$. 该循环程序在 i 次迭代后:

$$D^i = [1, 0, 0; 0, \cos \frac{i\pi}{2}, -\sin \frac{i\pi}{2}; 0, \sin \frac{i\pi}{2}, \cos \frac{i\pi}{2}]$$

因此,由式(2)得

$$z(0))^2 - 3y(0)^2 - 2y(0)z(0) > 0 \quad (4)$$

当 $i = 4N + 2$ 时

$$\varphi(i) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$$

根据上式,有

$$x(i) = -2x(0) + y(0) + 3z(0),$$

$$y(i) = -y(0),$$

$$z(i) = -x(0) + y(0) + 2z(0)$$

把 $x(i)$ 、 $y(i)$ 和 $z(i)$ 代入循环条件,有

$$-x(i)^2 + 10y(i)^2 + z(i)^2 = -(2x(0) - 2z(0))^2 + (x(0) + y(0))^2 - (y(0) + z(0))^2 + 10y^2(0) > 0 \quad (5)$$

当 $i = 4N + 3$ 时

$$\varphi(i) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$$

根据上式,有

$$x(i) = -x(0) - y(0) + 2z(0),$$

$$y(i) = x(0) - z(0),$$

$$z(i) = -x(0) + 2z(0).$$

把 $x(i)$ 、 $y(i)$ 和 $z(i)$ 代入循环条件, 有

$$-x(i)^2 + 10y(i)^2 + z(i)^2 = 10(x(0) - z(0))^2 - y^2(0) - 2x(0)y(0) + 4y(0)z(0) > 0 \quad (6)$$

分析: 由上面的分析可以知道, 判断这个程序的是否终止性等价于式(3)~(6)四个式子有没有公共解. 如果这四个式子有公共解那么这个程序就是不终止的, 否则程序就是终止的. 通过求解, 得到 $(x, y, z) = (-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2})$ 是上述四个式子的一个公共解, 也即是程序的一个不终止点. 然后考虑循环条件为非齐次非线性情形:

例 3: 考虑如下程序的终止性:

$$\text{while}(-x^2 - y^2 + \frac{z^2}{2} > 0 \wedge z > 0)$$

$$\text{do} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} := A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ end while.}$$

$$\varphi(i) = A^i \varphi(0) = PD^i P^{-1} \varphi(0) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(-1)^i + 2 - \frac{4}{3} \cdot (\frac{1}{2})^i & \frac{1}{2}(-1)^{i+1} + \frac{1}{2} & \frac{1}{3}(-1)^{i+1} - 1 + \frac{4}{3} \cdot (\frac{1}{2})^i \\ \frac{2}{3}(-1)^{i+1} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^{i-1} & (-1)^{i+2} & \frac{2}{3}(-1)^{i+2} - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^{i-1} \\ \frac{1}{3}(-1)^i + 2 - \frac{7}{3} \cdot (\frac{1}{2})^i & \frac{1}{2}(-1)^{i+1} + \frac{1}{2} & \frac{1}{3}(-1)^{i+1} - 1 + \frac{7}{3} \cdot (\frac{1}{2})^i \end{bmatrix} \varphi(0)$$

当 i 为奇数时:

$$\varphi(i) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^{i-2} & 1 & \frac{2}{3}(\frac{1}{2^{i-1}} - 1) \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^{i-1} & -1 & -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^{i-1} \\ \frac{5}{3} - \frac{7}{3} \cdot (\frac{1}{2})^i & 1 & -\frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot (\frac{1}{2})^i \end{bmatrix} \varphi(0)$$

根据上式, 有

$$x(i) = \left[\frac{5}{3} - \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^{i-2} \right] x(0) + y(0) + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2^{i-1}} - 1 \right] z(0)$$

$$y(i) = \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^{i-1} \right] x(0) - y(0) - \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^{i-1} \right] z(0)$$

$$z(i) = \left[\frac{5}{3} - \frac{7}{3} \cdot (\frac{1}{2})^i \right] x(0) + y(0) + \left[-\frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot (\frac{1}{2})^i \right] z(0)$$

把 $x(i)$ 、 $y(i)$ 和 $z(i)$ 代入循环条件, 有

$$\text{其中, 赋值矩阵 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

这里, 赋值矩阵 $A = [1, 1, 0; 1, -1, -1; \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}]$, 该矩阵有三个特征值 $1, \frac{1}{2}$ 和 -1 , 其特征值对应的特征向量是 $[1, 1, 1], [-2, -\frac{2}{7}, 0]$ 和 $[1, \frac{4}{7}, 1]$. 赋值矩阵 A 的 Jordan 形式为

$$D = [-1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, \frac{1}{2}],$$

$$P = [\frac{1}{3}, 2, -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}; \frac{1}{3}, 2, -\frac{7}{3}].$$

该循环程序在 i 次迭代后:

$$D^i = [(-1)^i, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, (\frac{1}{2})^i],$$

因此:

$$\begin{aligned} -x(i)^2 - y(i)^2 + \frac{z(i)^2}{2} > 0 \wedge z(i) > 0 \Leftrightarrow \\ & \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{2i+1} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i - \frac{33}{18} \right) x(0)^2 - \frac{3}{2} y(0)^2 \\ & + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{2i+1} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i - \frac{2}{3} \right) z(0)^2 + \\ & \left(\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i - \frac{1}{3} \right) x(0)y(0) + \\ & \left(-\left(\frac{1}{2} \right)^{2i} + \left(\frac{1}{2} \right)^i + 2 \right) x(0)z(0) + \\ & \left(-\frac{2}{3} - \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i \right) y(0)z(0) > 0 \\ & \left[\frac{5}{3} - \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i \right] x(0) + y(0) + \\ & \left[-\frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^i \right] z(0) > 0 \end{aligned}$$

分析:

这是个非线性多项式加线性约束的循环条件, 在满足初始条件的前提下, 随着迭代次数的增加 $-x(i)^2 - y(i)^2 + \frac{z(i)^2}{2}$ 必小于 0, 而我们知道, 要证明程序不终止, 那么必须满足当 i 为奇数和偶数

时都满足循环条件,而通过上面的分析我们知道当 i 为奇数时已经不满足循环条件了,所以程序必终止.

例 4:考虑如下程序的终止性:

$\text{while}(x^2 - y > 0)\{x := -x + y; y := y\}$

在该程序中,矩阵 $A = [-1, 1; 0, 1]$, 该矩阵有两个特征值 1 和 -1, 其特征向量分别是 $[1, 2]$ 和 $[1, 0]$. 矩阵 A 的 Jordan 形式为

$$D = [-1, 0; 0, 1],$$

然后 $P = [1, 1; 0, 2]$. 该循环程序在 i 次迭代后: $D^i = [(-1)^i, 0; 0, 1]$, 因此:

$$Z(i) = A^i Z(0) = P D^i P^{-1} Z(0) =$$

$$\begin{pmatrix} (-1)^i & \frac{1 - (-1)^i}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z(0)$$

根据上式,有

$$x(i) = (-1)^i x(0) + \frac{1 - (-1)^i}{2} y(0),$$

$$y(i) = y(0)$$

把 $x(i)$ 和 $y(i)$ 代入循环条件,有

当 i 为奇数时:

$$x(i)^2 - y(i) = x(0)^2 + y(0)^2 - 2x(0)y(0) - y(0)$$

当 i 为偶数时:

$$x(i)^2 - y(i) = x(0)^2 - y(0)$$

分析:

由上面分析我们知道,当 i 为奇数和偶数时如果循环条件都满足,则该程序显然不终止,如果不能同时满足,则程序终止. 所以,经分析,容易得到,当满足:

$$(1) x(0) > 0, y(0) < 0$$

$$(2) x(0) > 0, y(0) > 0 \text{ 且 } y(0) < (x(0) - y(0))^2$$

$$(3) x(0) < 0, y(0) > 0 \text{ 且 } y(0) < x(0)^2$$

$$(4) x(0) < 0, y(0) < 0$$

以上情况程序不终止. 其余情况程序终止.

从以上分析可以看出,针对一类非线性循环条件和简单线性赋值条件的程序,其程序的终止性是跟初值条件相关的. 不管该循环条件是齐次非线性循环程序还是非齐次非线性循环程序,当 i 充分大

时,总能通过计算出赋值矩阵的若尔当标准型在 i 次迭代以后的程序状态,再根据不同的初值,来判断在该初值条件下的程序的终止情况.

4 结束语

在实际应用中,面对一个非线性循环程序上,可以通过定理 1 判定它是否终止. 也根据不同的需求,通过上述方法来得到想到的结果——根据是否想要该程序终止而选择不同的初值. 这是一个用代数的方法去证明循环程序的终止性. 而下一步的工作是要用这个方法对更多类型的非线性循环程序进行研究,进而取得更多更成熟的对非线性程序终止性研究的成果.

参考文献:

- [1] Podelski A, Rybalchenko A. A complete method for the synthesis of linear ranking functions[C]//VMCAI 2004: Verification, Model Checking, and Abstract Interpretation, LNCS. Berlin: Springer Verlag, 2004: 239-251.
- [2] Bradley A R, Manna Z, Sipma H B. Termination of polynomial programs[C]//Proc. of the Verification, Model Checking, and Abstract Interpretation. LNCS 3385. Heidelberg: Springer Verlag, 2005:113-129.
- [3] Yang L, Zhan N J, Xia B C, et al. Program verification by using discoverer[C]// Proc. of the Verified Software. Heidelberg: Springer Verlag, 2008:528-538.
- [4] 姚勇. 区间上非线性程序的终止性判定[J]. 软件学报, 2010,21(12):3116-3123.
- [5] Tiwari A. Termination of linear programs [C]//CAV '04, LNCS 3114. Boston, 2004:70-82.
- [6] 李骏, 李轶, 冯勇. 一类循环条件非线性的程序终止性[J]. 四川大学学报:工程科学版, 2009, 41(1):129-133.
- [7] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数[M]. 北京:高等教育出版社, 1991:290-316.

作者简介:

廖苑蓉 女, (1987—), 硕士研究生. 研究方向为信息安全与程序验证.

陈光喜 男, (1971—), 博士, 教授. 研究方向为信息安全与计算机代数.